Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca - CEFET/RJ
Unidade de Ensino Descentralizada de Nova Iguaçu

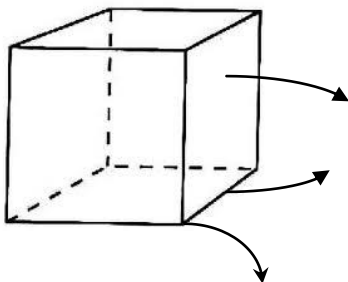
GEOMETRIA ESPACIAL

2º BIMESTRE **PROF.:** CÉLIO FREITAS **DATA :** / /16

ALUNO : ______________________________ **TURMA**:__________

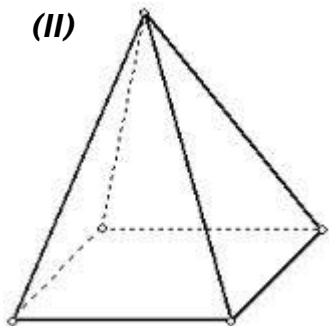
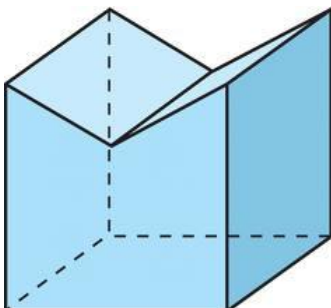
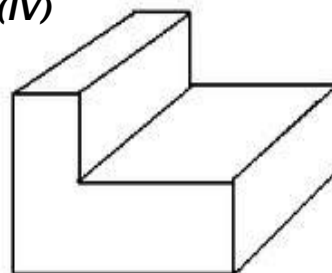
Observação: material cedido pelo professor Marcelo

POLIEDRO *é uma reunião de um número finito de polígonos chamados* ***faces*** *onde:*
(i) *cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e somente um, outro polígono.*
(ii) *a interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.*

(I)

Aresta *do poliedro é cada lado do polígono que é comum a exatamente duas faces.*
Vértice *do poliedro é o vértice de cada face.*

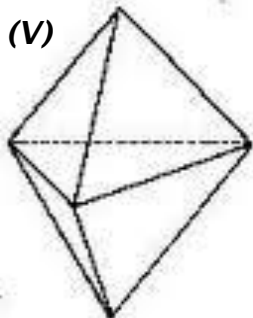
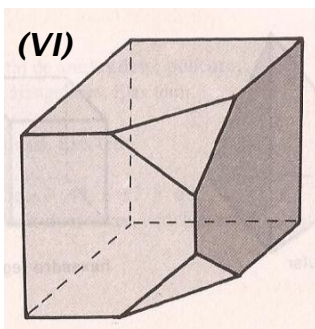
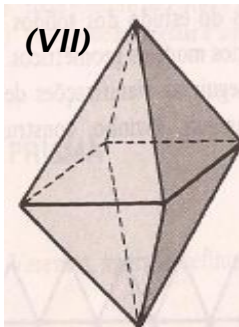
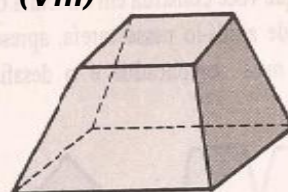
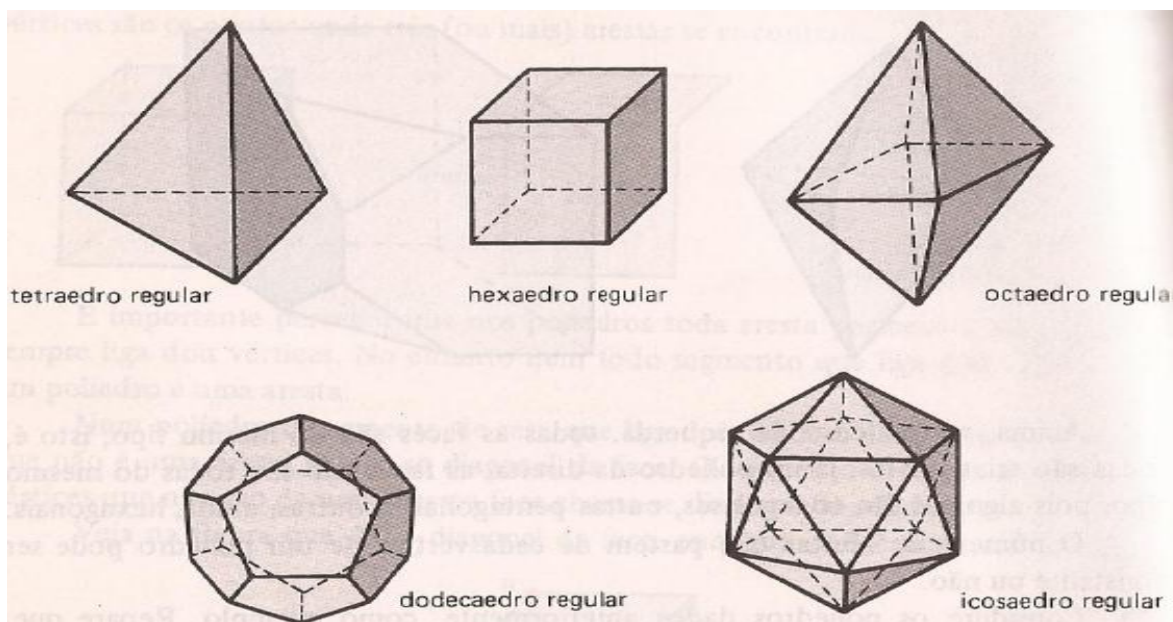
Um ***poliedro é convexo*** *se o segmento de reta que liga dois quaisquer de seus pontos sempre está inteiramente contido nesse poliedro.*

Ex.1) *Classifique os poliedros abaixo em convexo ou não convexo:*

(II)

(III)

(IV)

POLIEDROS DE PLATÃO *são os poliedros que têm todas as faces do mesmo tipo e, ainda, concorrem o mesmo número de arestas em cada vértice.*

Ex.2) *Quais dos poliedros vistos anteriormente são poliedros de Platão?*

Ex.3) *Indique abaixo os poliedros de Platão.*

(V)

(VI)

(VII)

(VIII)

POLIEDROS REGULARES *são os poliedros de Platão que têm como faces polígonos regulares.*
Essa dupla exigência limita o número de poliedros regulares a cinco: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Ex.4) *Todo poliedro de Platão é um poliedro regular? E o contrário? (Visite http://www.uff.br/cdme/pdp/)*

Ex.5) *Um poliedro convexo de 14 faces possui 12 faces quadrangulares e 2 hexagonais. Ache o número de suas arestas.*

Exercícios:

1) *Quantas arestas e vértices possui:*
a) um dodecaedro regular?
b) um icosaedro regular?

2)

TEOREMA DE EULER*: "Num* ***poliedro convexo*** *qualquer, sejam* ***V*** *o número de vértices,* ***A*** *o número de arestas e* ***F*** *o número de faces. Vale, então, a seguinte relação:* ***V – A + F = 2****."*

a) Verifique a relação de Euler nos poliedros de I a VIII dados anteriormente.
b) Verifique a relação de Euler nos poliedros regulares.
c) Determine o número de vértices do poliedro convexo dado no exemplo 5

3) *Um poliedro convexo possui 6 faces triangulares, 2 pentagonais, 2 hexagonais e 1 quandrangular; quantos vértices tem esse poliedro?*

4) *Um poliedro convexo de 11 vértices possui uma face pentagonal, 1 octogonal, 2 quadrangulares e as demais triangulares. Calcule o número de faces desse poliedro.*

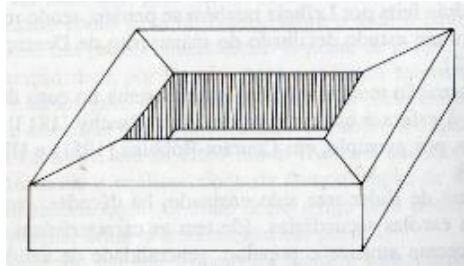
5) *Observe as seguintes definições:*

Diagonal da face *de um poliedro é o segmento de reta que liga dois vértices de uma mesma face e que não é uma aresta.*
Diagonal do poliedro *é o segmento de reta que liga dois vértices que não são de uma mesma face.*
Nessas condições, determine:

a) Quantas diagonais possui um dodecaedro regular?
b) Quantas diagonais possui um icosaedro regular?
c) Quantas diagonais possui o poliedo da questão 3?

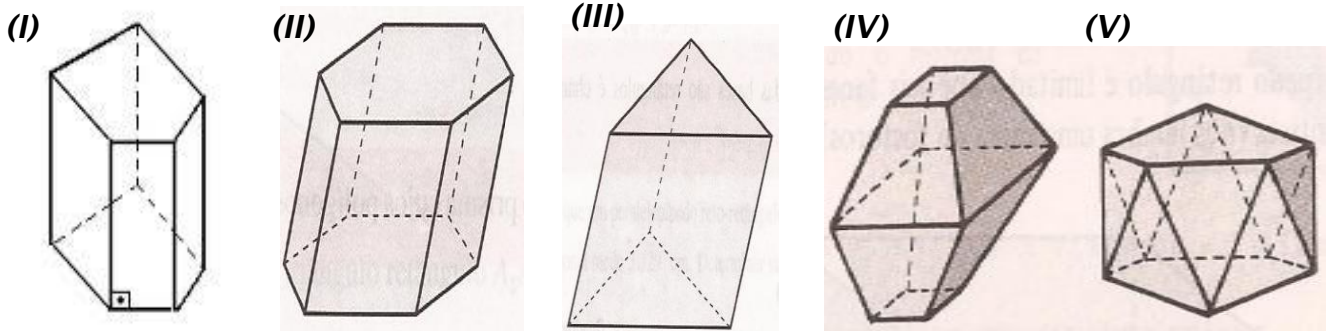
GABARITO: 1) a) A = 30, V = 20; b) A = 30, V = 12; 2) c) V = 18; 3)V = 13; 4) F = 9; 5) a) 100; b) 36; c) 26.

Observação: Na verdade, o **Teorema de Euler não vale só para poliedros convexos**, mas neste caso há demonstrações elementares e de fácil entendimento para um aluno do ensino médio. O **Teorema de Euler pode ser estendido para poliedros que *são homeomorfos a uma esfera***, o que significa em linguagem simples: "que se imaginarmos o poliedro feito de borracha e o inflarmos, injetando ar, o poliedro será transformado em esfera". **Note que todos os poliedros vistos até agora satisfazem o Teorema de Euler, inclusive os poliedros III e IV da página 1, que não são convexos**, pois são homeomorfos a uma esfera, como descrito anteriormente. **Poincaré** [1893] foi o primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler, **neste caso estendido**, é um teorema de **Topologia** (área da matemática que se estuda no nível superior) e não de Geometria, ao notar que o número **V-A+F** é um ***invariante topológico*** do poliedro.

O Poliedro a seguir **não é homeomorfo a uma esfera** (***é homeomorfo a um toro***), pois prodedendo como descrito acima ele se tornará um toro (câmara de ar de um pneu).

Neste poliedro tem-se: **V – A + F = 16 – 32 + 16 = 0** (não satisfaz a relação de Euler).

Para Pensar: Pelo Teorema de Euler estendido para poliedros homeomorfos a uma esfera podemos afirmar que "Se o poliedro não é homeomorfo a uma esfera, então ele não satisfaz a relação V – A + F = 2" ?

PRISMA *é um poliedro convexo composto de duas faces idênticas e paralelas chamadas de **bases**. As faces restantes, as **faces laterais**, são paralelogramos com dois vértices numa base e dois na outra base.*

Ex.1) *Quais dos poliedros abaixo são prismas?*

Um prisma é classificado de acordo com o número de arestas de uma base. (prisma triangular, prisma quadrangular, etc)

*Um **prisma é reto** se, e somente se, suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Se um prisma não é reto, então é chamado de **prisma oblíquo**.*

*Um **prisma é regular** se, e somente se, é reto e seus polígonos das bases são regulares.*

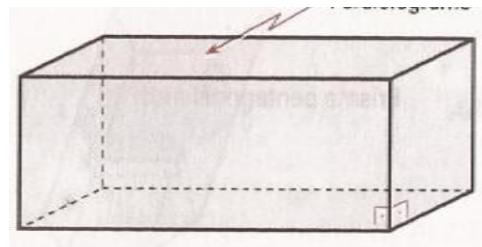
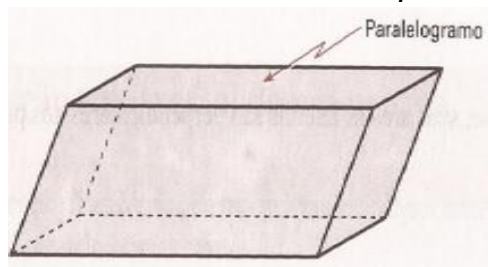
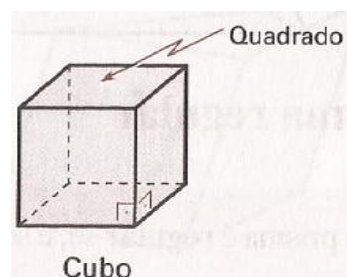
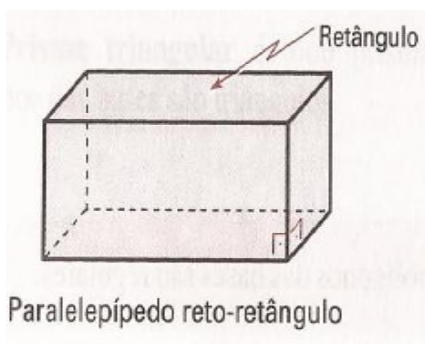
*A distância entre os planos das bases é chamada de **altura do prisma.***

***Área lateral do prisma** é a soma das áreas de todas as faces laterais.*

***Área total do prisma** é a soma das áreas de todas as faces.*

Ex.2) *Classifique os prismas do exemplo 1.*

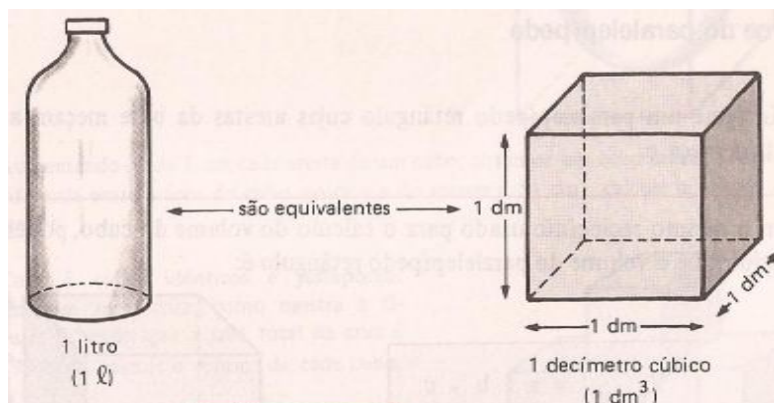
Ex.3) *Calcule a área lateral e a área total de um prisma triangular regular de altura 8 cm, sabendo que a diagonal de uma das faces mede 10 cm.*

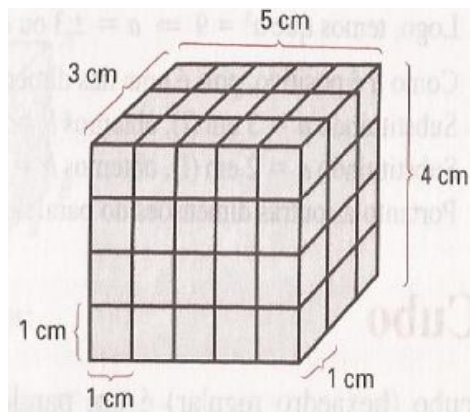
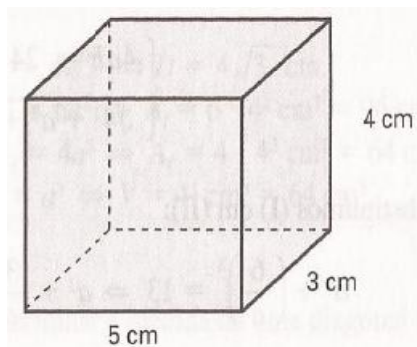
PARALELEPÍPEDO *é todo prisma cujos polígonos da base são* ***paralelogramos.***

O paralelepípedo reto-retângulo *é um paralelepípedo reto cujos polígonos da base são retângulos.*

Ex.4) *Em um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c, determine a expressão que representa:*
a) A medida de sua diagonal.
b) A área total.

Ex.5) *Determine as expressões das medidas da diagonal e da área total de um cubo cuja aresta mede a.*

VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETO-RETÂNGULO

A medida da quantidade de espaço ocupada pelo corpo de um sólido é chamada ***volume do sólido.***

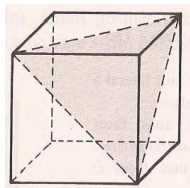
Uma unidade de volume muito utilizada é o ***litro****. O litro é o volume de um cubo com arestas de 1 dm.*

A porção do espaço ocupada por um cubo de aresta 1 cm é uma unidade de volume definida como 1 cm³.

Ex. 6) *Qual é o volume, em centímetros cúbicos, de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são 5 cm, 3 cm e 4 cm?*

O volume V de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é dado pela igualdade:
*Logo, a expressão do volume V de um cubo de aresta **a** é:*

Ex.7) *A diagonal da base de um cubo mede 4 cm. Calcule o volume e a área total desse poliedro.*

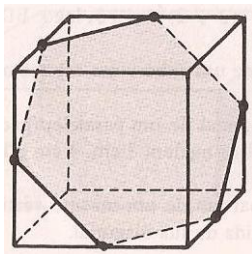
***Exercícios*:**

1) *Calcule a medida do volume de um paralelepípedo reto-retângulo, cuja diagonal mede 25 cm e as arestas da base medem 9 cm e 12 cm.*

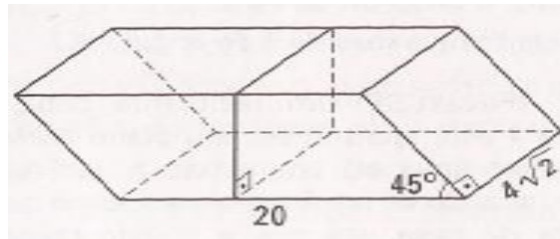
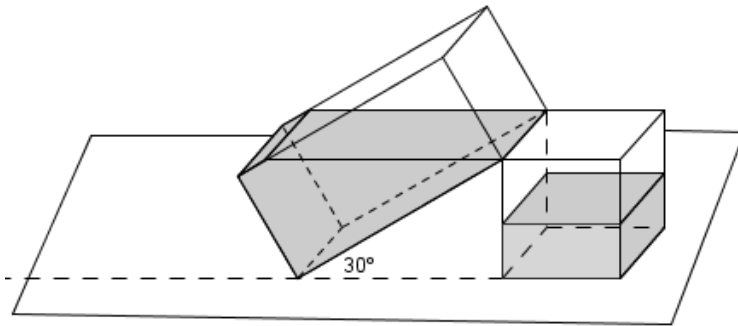
2) *O cubo abaixo possui 64 cm³ de volume. Nessas condições, determine:*

a) a área total do cubo.
b) a área do triângulo sombreado.

3) *(Fuvest) Um tanque em forma de um paralelepípedo reto-retângulo tem por base um retângulo horizontal de lados 0,8 e 1,2 m. Um indivíduo, ao mergulhar completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,075m. Então o volume do indivíduo, em metros cúbicos, é:*

(a) 0,066 *(b) 0,072* *(c)0,096* *(d)0,6* *(e) 1*

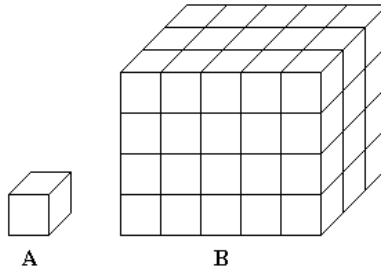
4) *O hexágono sombreado, cujos vértices são pontos médios das arestas do cubo, tem área de* $3\sqrt{3}$ *cm². Calcule a área total do cubo e seu volume.*

5) *Um prisma hexagonal regular de 8 cm de altura tem arestas da base medindo 3 cm. Calcule:*
a) A área total do poliedro
b)Quantas diagonais deste poliedro partem de um vértice? Em seguida, calcule a medida da maior diagonal.

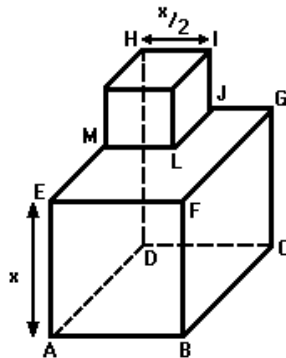
6) *Em um cubo, a área de uma face, a área total e o volume formam, nessa ordem, uma P.G.. Determine a medida de uma diagonal desse cubo.*

__7)__ (UFMG) A base de um paralelepípedo é uma região retangular cujos lados medem 20 cm e $4\sqrt{2}$ cm. As extremidades são duas faces quadradas que fazem um ângulo de 45° com a base. Um plano perpendicular à aresta maior intercepta o paralelepípedo segundo uma região retangular. A área total do paralelepípedo, em cm², é:

__8)__ Um paralelepípedo reto-retângulo de base quadrada está inclinado 30° em relação ao plano da base do cubo, como mostra a figura. Sabendo que as bases do paralelepípedo e do cubo têm uma aresta em comum e que o volume do cubo é 12 litros, calcule o volume do paralelepípedo.

GABARITO

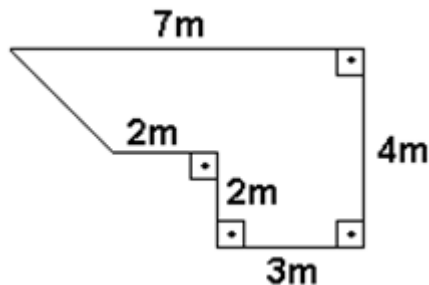
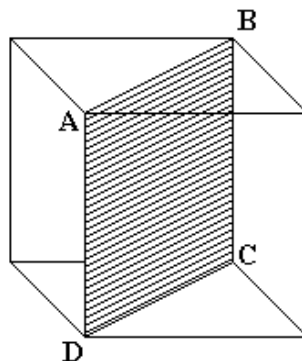
1) 2160 cm³; 2) a) 96 cm²; b) $8\sqrt{3}$ cm²; 3)b ; 4) A_T = 24 cm² ; V = 8 cm³;
5) a)144+$27\sqrt{3}$ cm²; b)três. D = 10cm; 6) $36\sqrt{3}$; 7) 224+160$\sqrt{2}$ cm²; 8) 24 litros;

MAIS QUESTÕES DE PRISMAS DE VESTIBULARES

9) Quantos cubos A precisa-se empilhar para formar o paralelepípedo B?

a) 60 b) 47 c) 94 d) 39 e) 48

10) O sólido representado na figura a seguir é formado por um cubo de aresta de medida x/2 que se apóia sobre um cubo de aresta de medida x.

O volume de sólido representando é dado por

a) $9x^3/8$ b) $x^3/8$ c) $3x^3$ d) $3x^3/2$ e) $7x^3$

11) Um prisma com 3m de altura tem seção transversal como se mostra na figura a seguir. Calcule o volume, em m^3, deste prisma.

12) Na figura a seguir, que representa um cubo, o perímetro do quadrilátero ABCD mede $8(1+\sqrt{2})$cm. Calcule o volume do cubo em cm^3.

13) (RURAL) - Se aumentarmos em 2 m a aresta de um cubo, a soma da área de suas faces aumenta em 264 m^2. Determine o volume do cubo original.

14) (CEFET – VESTIBULAR DE INGRESSO NO 2º SEMESTRE DE 2006)

Gilson, um aluno muito curioso, certo dia perguntou ao seu professor de matemática:

- Como eu faço para calcular o volume aproximado ocupado pelo corpo de uma pessoa?

Para lhe responder, o professor fez o seguinte experimento:

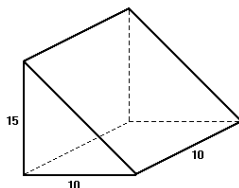
- pediu para Gilson mergulhar numa banheira em forma de cilindro reto com 1 metro de raio da base e 50 centímetros de altura e, em seguida, sair.

A banheira estava sobre um chão plano e a água estava a 40 centímetros de altura antes de Gilson mergulhar.

Quando Gilson mergulhou, ficando seu corpo totalmente dentro da água, esta subiu 4 cm.

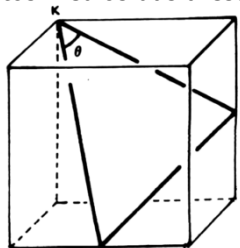
O volume ocupado pelo corpo de Gilson é igual ao volume de um cubo de aresta igual a, aproximadamente:

a) 30 cm b) 40 cm c) 50 cm d) 60 cm e) 70 cm

15) De uma viga de madeira de seção quadrada de lado l = 10cm extrai-se uma cunha de altura h =15cm, conforme a figura. O volume da cunha é:

a) 250 cm^3 b) 500 cm^3 c) 750 cm^3 d) 1000 cm^3 e) 1250 cm^3

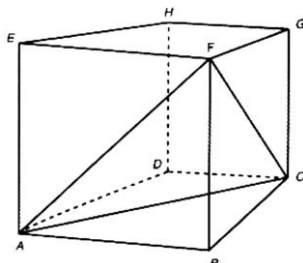
16) (RURAL) - A diagonal de um paralelepípedo retângulo mede $2\sqrt{14}$ cm, sendo sua área total equivalente a 88 cm.

Sabendo que suas dimensões estão em progressão aritmética, determine estas dimensões.

17) (UFRJ 89 / 2ª) - Os pontos J e I são os pontos médios das arestas do cubo sugerido na figura.

a) Calcule, em função da medida a da aresta do cubo, a distância de I e J.

b) Determine a medida θ do ângulo $K\hat{I}J$.

18) (UFRJ 03 / 1ª) - Uma pedra de massa 25 kg tem a forma de um paralelepípedo com 2 cm de espessura. Sua base é um quadrado com 1 m de lado. Qual a massa de uma outra pedra, do mesmo material, que tem a forma de um paralelepípedo com 2 m de comprimento, 80 cm de largura e 3 cm de espessura?

19) (UFRJ 02 - PROVA ANULADA) - O triângulo ACF tem vértices coincidindo com três dos vértices de um cubo de aresta **a**, como mostra a figura abaixo.

Determine a área de ACF em função de a.

20) Prove que o número de diagonais de um prisma convexo com **2n** vértices é dado pela expressão **n.(n-3)**

RESPOSTAS:

9) A 10) A 11) 54 m^3 12) 64 13) 1000m^3 14) C 15) C 16) 2, 4, 6 17) a) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ *b)* arc cos $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ *18) 60kg 19)* $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Considere dois sólidos P_1 e P_2, com bases num plano α. Se ***qualquer*** *plano β, paralelo a α, que intercepta um dos sólidos também intercepta o outro e determina nos dois sólidos secções de mesma área ($S_1 = S_2$), então os sólidos P_1 e P_2 têm o mesmo volume.*

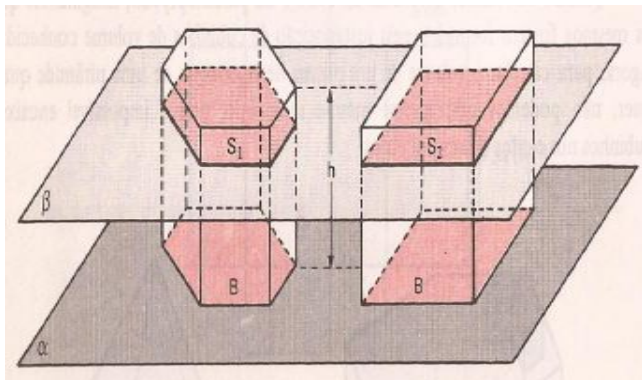
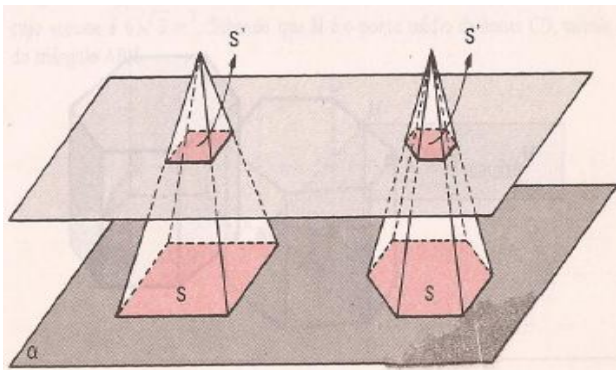



Figura 1 *Figura 2*

Volume do prisma

Observe na figura 1 que qualquer que seja a distância do plano β ao plano α, tem-se que $S_1 = S_2 = B$. Assim, pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que:

$$V_{prisma} = V_{paralelepípedo} \therefore V_{prisma} = \text{área da base x altura} \therefore$$

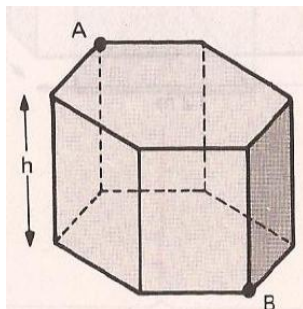
$$V_{prisma} = B \cdot h$$

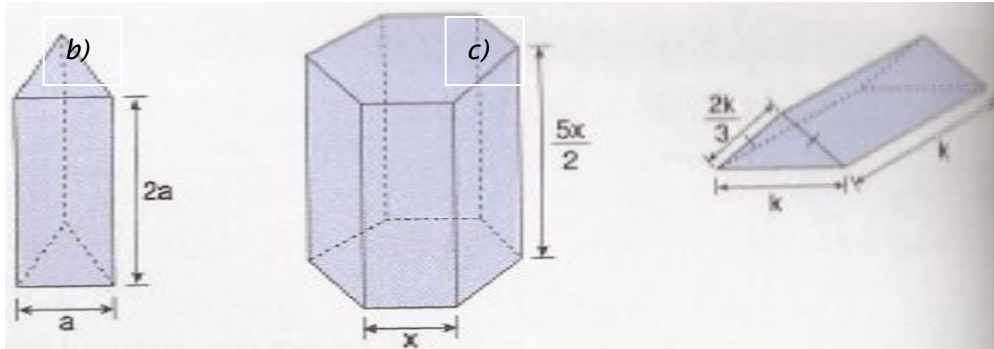
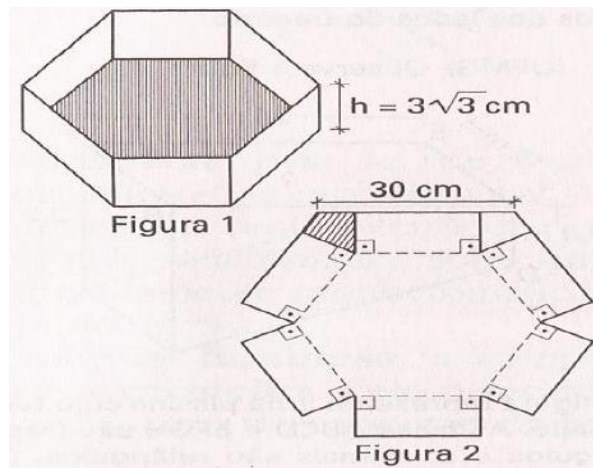
Ex.1) *Calcule o volume de um prisma hexagonal regular de altura 1 dm e área total igual a $48\sqrt{3}$ dm².*

Ex.2) *O polígono de uma base de um prisma é um quadrado de lado 5 cm. Cada aresta lateral mede 6 cm e forma com os planos das bases ângulos de 60°. Calcule o volume do prisma.*

Exercícios:

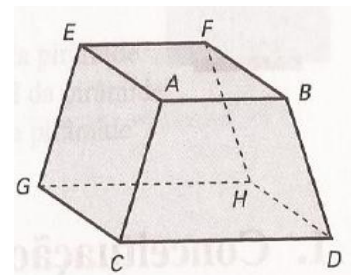
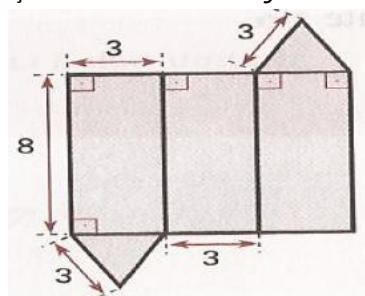
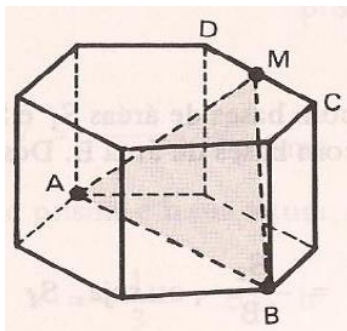
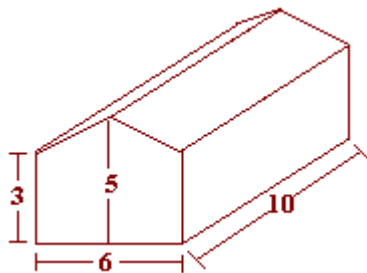
1) *A altura de um prisma regular triangular é o dobro da aresta da base. Calcule a área lateral desse sólido sabendo que seu volume é $108\sqrt{3}$ cm³.*

2) *No prisma regular abaixo, a diagonal AB mede 10 cm e a altura h é 6 cm. Calcule o volume desse poliedro.*

3) *Escreva em função de a, x e k, a área lateral, a área total e o volume de cada um dos prismas, sendo a) e b) prismas regulares e c) um prisma reto, cujas medidas estão indicadas nas figuras:*

a) *b)* *c)*

4) (*UFF) Um fabricante de embalagens, para fazer caixas de papelão, sem tampa, em forma de prisma hexagonal regular (figura 1), se utiliza de hexágonos regulares de papelão, cada um deles com lado 30 cm. Corta, em cada vértice, um quadrilátero, como o destacado na figura 2 e, a seguir, dobra o papelão nas linhas tracejadas. Sabendo que a altura da caixa é $3\sqrt{3}$ cm, qual é o volume da caixa?*

5) *A base de um prisma é um retângulo de lados 6 cm e 4 cm. Cada aresta lateral mede 10 cm e forma com os planos das bases ângulos de 45°. Calcule o volume desse prisma.*

6) *(Fuvest) Na figura:*

- *ABCD e EFGH são trapézios de lados 2, 8, 5 e 5;*
- *Os trapézios estão em planos paralelos cuja distância é 3;*
- *As retas AE, BF, DH e CG são paralelas.*

Calcule o volume do sólido.

7) *(Fatec-SP) Temos na figura a planificação de um sólido cujo volume é:*

8) *A figura mostra um prisma regular hexagonal cuja altura é a metade da aresta da base e cujo volume é $6\sqrt{3}$ cm³. Sabendo que M é o ponto médio da aresta CD, calcule a área do triângulo ABM.*

9) *A figura abaixo representa um galpão com as medidas indicadas em metros. Qual é o volume do galpão?*

10) *(Unifor-CE) A base de um prisma reto é um triângulo isósceles cujos lados iguais medem 2 cm e um dos ângulos internos mede 120°. Se esse prisma tem $6\sqrt{3}$ cm de altura, o seu volume é:*

11) *(ITA) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume desse prisma, em cm³, é:*

12) *(PUC) Na base de um prisma triangular regular com altura de 8 cm está inscrito um círculo de raio $2\sqrt{3}$ cm. O volume desse prisma, em cm³ é igual a:*

13) *(UERJ) A figura ao lado representa uma piscina completamente cheia de água, cuja forma é um prisma hexagonal regular. Admita que:*

- A, B, C e D representam vértices desse prisma;

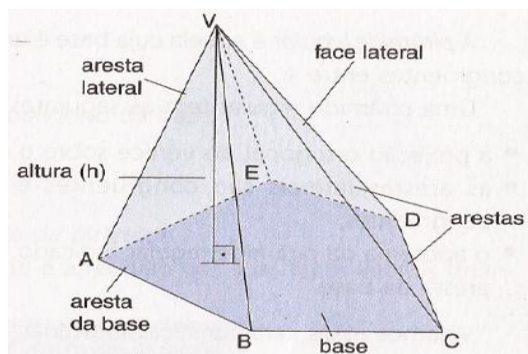
- o volume da piscina é igual a 450 m³ e $\frac{AB}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{10}$

- um atleta nada, em linha reta, do ponto A até o ponto médio da aresta CD, utilizando apenas glicose como fonte de energia para seus músculos.

A velocidade média do atleta no percurso definido fo de 1,0 m/s. O intervalo de tempo, em segundos, gasto nesse percurso equivale a cerca de:

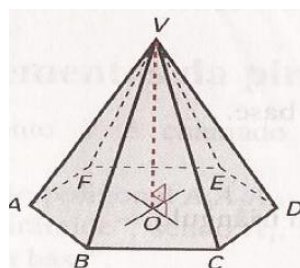
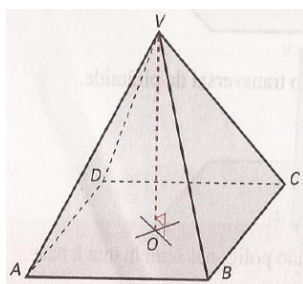
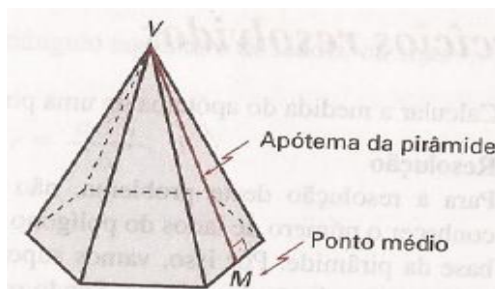
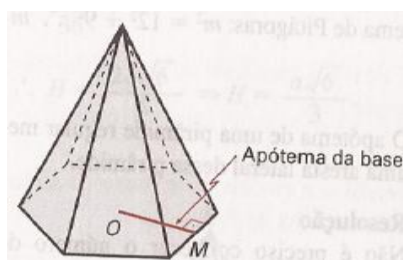
Respostas:

1) *216 cm²;* ***2)*** *$144\sqrt{3}$ cm³;* ***3) a)*** *$A_L = 6x^2$; $A_T = \frac{12+\sqrt{3}}{2}x^2$; $V = \frac{x^3\sqrt{3}}{2}$;* ***b)*** *$A_L = 15x^2$; $A_T = 3(5+\sqrt{3})x^2$; $V = \frac{15\sqrt{3}}{4}x^3$;* ***c)*** *$A_L = \frac{7x^2}{3}$; $A_T = \frac{14+\sqrt{7}}{6}x^2$; $V = \frac{x^3\sqrt{7}}{12}$;* ***4)*** *7776 cm³;* ***5)*** *$120\sqrt{2}$ cm³;* ***6)*** *60;* ***7)*** *$18\sqrt{3}$;* ***8)*** *4 cm²;* ***9)*** *240 m²;* ***10)*** *18 cm³;* ***11)*** *$54\sqrt{3}$;* ***12)*** *$288\sqrt{3}$;* ***13)*** *18*

PIRÂMIDE *é um poliedro convexo que possui todos os vértices num mesmo plano, com exceção de um.*

As pirâmides recebem o nome em função do tipo de base. Ao lado, vemos uma pirâmide pentagonal.

PIRÂMIDE REGULAR

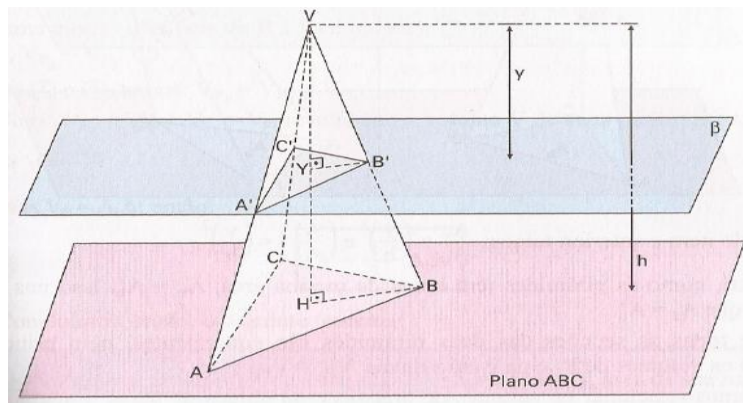
É aquela cuja base é um polígono regular e cujas arestas laterais são congruentes entre si.
Consequências:

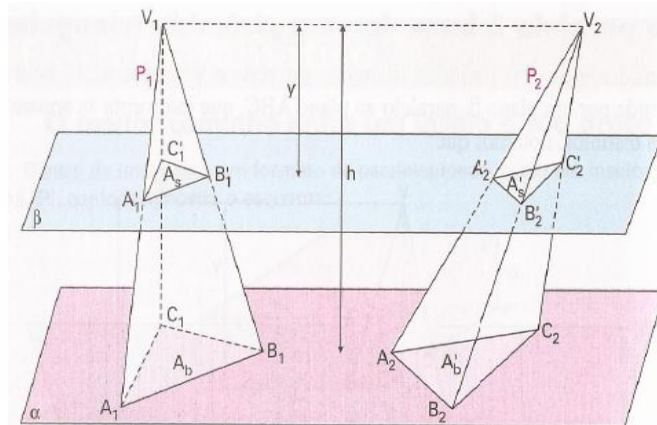
- *A projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base é ....*
- *As faces laterais são ....*

Apótema da base de uma pirâmide regular (m) *é o apótema do polígono da base.*
Apótema de uma pirâmide regular (g) *é todo segmento de reta cujos extremos são o vértice da pirâmide e o ponto médio de um dos lados da base.*

Qual é a equação que podemos estabelecer com os elementos h, g e m?

SEÇÃO PARALELA À BASE DE UMA PIRÂMIDE TRIANGULAR

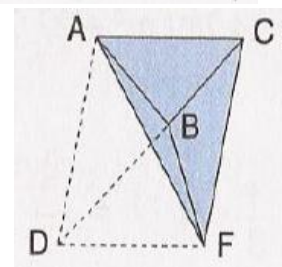
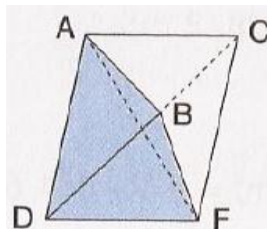
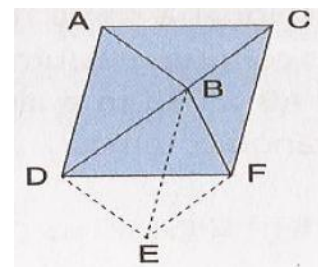
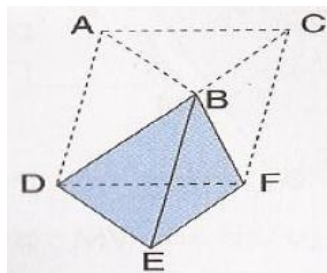
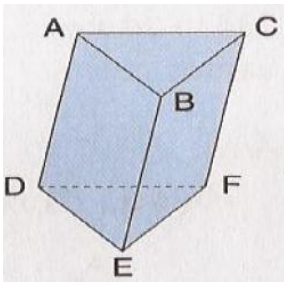
Abaixo vemos uma pirâmide triangular de vértice V e base ABC sendo seccionada por um plano β, paralelo ao plano ABC. Concluímos que:

1) *A secção (Δ A´B´C´) e a base (Δ ABC) são triângulos semelhantes de razão* $\frac{y}{h}$*.*

2) *A razão entre a área da secção e a área da base é* $\left(\frac{y}{h}\right)^2$.

VOLUME DA PIRÂMIDE

Vamos comparar os volumes de duas pirâmides de áreas da base equivalentes e mesma altura.

Conclusão: $A_b = A'_b$
Justificativa:

Portanto, se todas as secções das duas pirâmides de altura h possuem a mesma área, pelo princípio de Cavalieri, os volumes das duas pirâmides acima são iguais.

Vamos comparar os volumes de prismas e pirâmides de bases triangulares:

As pirâmides BDEF e ABCF possuem mesmo volume, pois...

As pirâmides ABDF e ABCF possuem mesmo volume, pois...

*Portanto, o volume de uma **pirâmide triangular** é dado pela igualdade:*

*Uma consequência desse resultado será que " O volume de **qualquer** pirâmide é $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base pela medida da altura". Por quê?*

Ex.1) *Todas as arestas de uma pirâmide regular de base quadrada medem 10 cm. Calcule:*

a) O apótema da pirâmide   *d) A área total*
b) O apótema da base   *e) O volume*
c) A medida da altura da pirâmide

Ex.2) *Qual é a razão entre os volumes das pirâmides $V'_1A'_1B'_1C'_1$ e $V_1A_1B_1C_1$ (FIGURA 7)?*

Ex.3) *Considere a pirâmide $V_1A_1B_1C_1$ da figura 7 com altura 10 cm e área da base igual a 24 cm². O plano β, paralelo à base, secciona a pirâmide e dista 2,5 cm do vértice da pirâmide. Calcule a área da secção e o volume do **tronco da pirâmide**.*

EXERCÍCIOS

1) *Em um tetraedro regular de aresta **a**, determine, em função de **a**:*

a) O apótema da pirâmide   *d) A área total*
b) O apótema da base   *e) O volume*
c) A medida da altura

2) *Numa pirâmide regular de base hexagonal, as arestas da base medem 3 cm e as demais, 5 cm. Calcule:*

a) O apótema da pirâmide   *d) A área total*
b) O apótema da base   *e) O volume*
c) A medida da altura

3) *O perímetro da base de uma pirâmide regular quadrangular mede 72 cm e seu apótema mede 15 cm. Determine as medidas:*

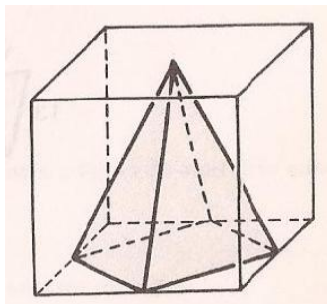
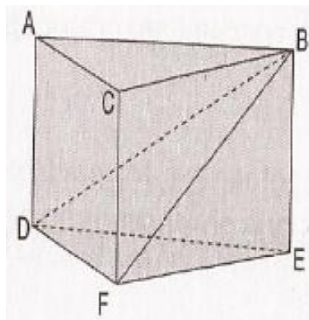
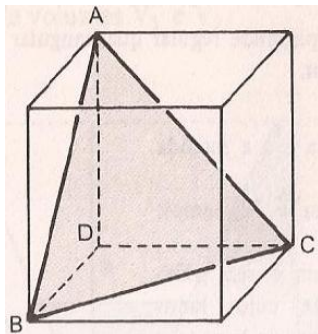
a) da área lateral   *b) da área total*   *c) do volume*

4) *Uma pirâmide regular hexagonal de 12 cm de altura tem aresta da base medindo $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm. Calcule:*

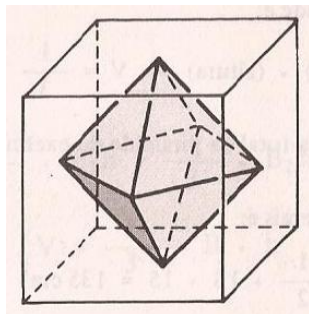
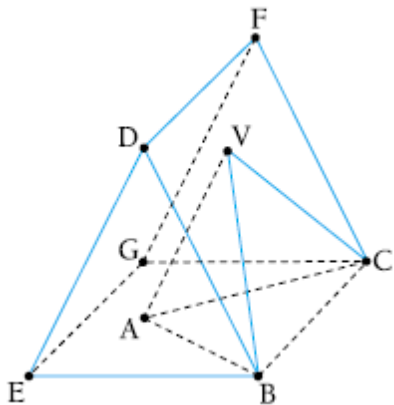
a) o apótema da base   *e) a área lateral*
b) o apótema da pirâmide   *f) a área total*
c) a aresta lateral   *g) o volume*
d) a área da base

5) *Calcule o volume de uma pirâmide de 12 cm de altura, sendo a base um losango cujas diagonais medem 6 cm e 10 cm.*

6) *Determine a área lateral e a área total de um pirâmide regular triangular de 7 cm de apótema, sendo 2 cm o raio do círculo circunscrito à base.*

7) *Unindo-se os pontos médios das arestas da base com o centro da face superior de um cubo, obtém-se uma pirâmide. Sabendo que o volume do cubo é 216 cm³, calcule o volume e a área total dessa pirâmide.*

8) *(UFMG) Observe a figura abaixo. Essa figura representa um prisma reto de base triangular. O plano que contém os vértices B, D e F divide esse prisma em dois sólidos DACFB, de volume V_1, e DEFB, de volume V_2. Assim sendo, a razão V_1 / V_2 é igual a:*

9) *Unindo-se os vértices A, B, C e D do cubo da figura, obtém-se uma pirâmide com volume de 36 litros. Calcule o volume do cubo e a área total da pirâmide.*

10) *(Unirio) Um prisma de altura H e uma pirâmide têm bases com a mesma área. Se o volume do prisma é a metade do volume da pirâmide, a altura da pirâmide é:*

(a)H/6 (b) H/3 (c) 2H (d) 3H (e) 6H

11) *Unindo-se os centros das faces de um cubo, obtém-se um octaedro regular. Sabendo que o volume do cubo é 1000 litros, calcule o volume e a área total do octaedro.*

12) *(UERJ) Um artesão retirou, de uma pedra com a forma inicial de um prisma triangular reto de base EBD, um tetraedro regular VABC. Observe a figura abaixo:*

Considere os seguintes dados:

· os vértices A e V pertencem a duas faces laterais do prisma;

· BD = BE = BC = 1 m.

Determine o volume inicial da pedra.

__13)__ (Fuvest) A base de uma pirâmide regular é um quadrado ABCD de lado 6 e diagonais AC e BD. A distância de seu vértice E ao plano que contém a base é 4.

a) Determine o volume do tetraedro ABDE.

b) Determine a distância do ponto B ao plano que contém a face ADE.

__14)__ Um tronco de pirâmide regular de base quadrada tem arestas das bases com medidas 4 cm e 12 cm e altura de medida 3 cm. Calcule:

a) a área lateral *c) o volume*

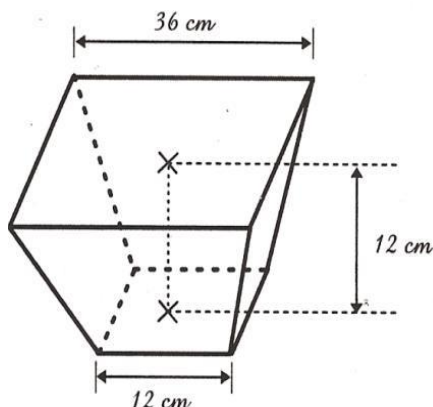
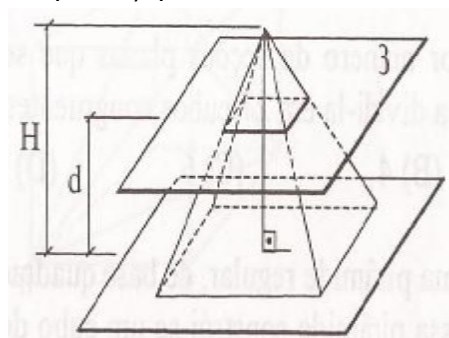
b) a área total *d) a medida de uma aresta lateral*

__15)__ Um tetraedro regular de 8 cm de aresta, é seccionado por um plano que passa pelos pontos médios de três das suas arestas, originando um novo tetraedro e um tronco. Determine:

a) a área da secção.

b) o volume do tronco.

__16)__ (Vunesp) É dada uma pirâmide de altura H = 9 cm, e volume V = 108 cm². Um plano paralelo à base dessa pirâmide corta-a determinando um tronco de pirâmide de altura h = 3 cm. O volume do tronco de pirâmide resultante é:

__17)__ (UFSM) O cesto de lixo representado tem a forma de tronco de pirâmide quadrangular regular. Considerando que as medidas dadas são internas, o volume do cesto, em cm³, é:

__18)__ (UFF) A figura abaixo representa uma pirâmide regular de base quadrangular que foi seccionada por um plano β paralelo à base.

Sabendo-se que a altura da pirâmide é H e que d é a distância entre β e a base, determine o valor de d para que a pirâmide fique dividida em dois sólidos de volumes iguais.

RESPOSTAS

***1)** a)$\frac{a\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; c) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; d) $a^2\sqrt{3}$; e) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$; **2)** a)$\frac{\sqrt{109}}{2}$ cm; b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm; c) $\frac{\sqrt{82}}{2}$ cm; d)$27\sqrt{3}+9\sqrt{109}$ cm²; e)$\frac{9\sqrt{246}}{4}$ cm²; **3)** a) 540 cm²; b) 864 cm²; c) 1296 cm³; **4)** a) 5 cm; b) 13 cm; c) $\frac{2}{3}\sqrt{399}$ cm; d) $50\sqrt{3}$ cm²; e) $130\sqrt{3}$ cm²; f) $180\sqrt{3}$ cm²; g)200 $\sqrt{3}$ cm³; **5)** 120cm³; **6)**$A_l = 21\sqrt{3}$ cm²; $A_T = 24\sqrt{3}$ cm²; **7)** 36 cm³ e 72 cm²; **8)**2; **9)** 216 litros e (54 + 27$\sqrt{3}$) dm²; **10)** e; **11)** 500/3 litros e 100$\sqrt{3}$ dm²; **12)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ m³; **13)**a) 24; b) 24/5; **14)**a) 160 cm²; b) 320 cm²; c) 208 cm³; d)$\sqrt{41}$ cm; **15)**a)$4\sqrt{3}$ cm²; b)$\frac{112\sqrt{2}}{3}$ cm³; **16)** 54 cm³; **17)** 7488 cm³; **18)** $d = H.\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$*

CILINDRO CIRCULAR

Considere dois planos α e β paralelos e distintos, um círculo C de centro O contido em α e uma reta s secante aos dois planos. (figura 1)

*A reunião de **todos os segmentos de reta** paralelos à reta s, com extremos no círculo C e no plano β é um sólido chamado cilindro circular. (figura 2)*

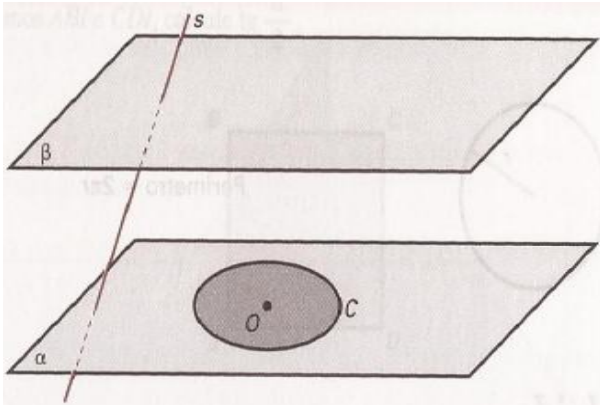



figura 1

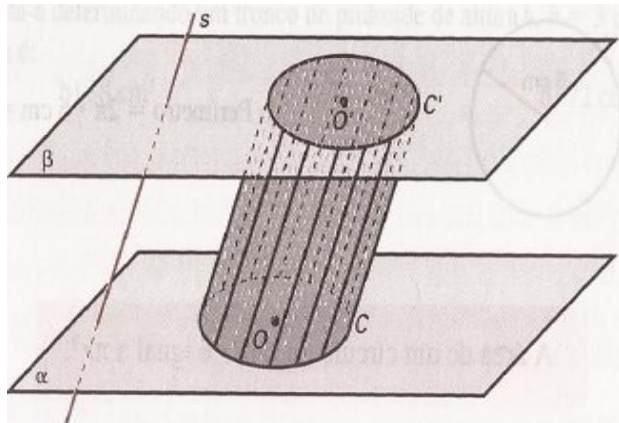
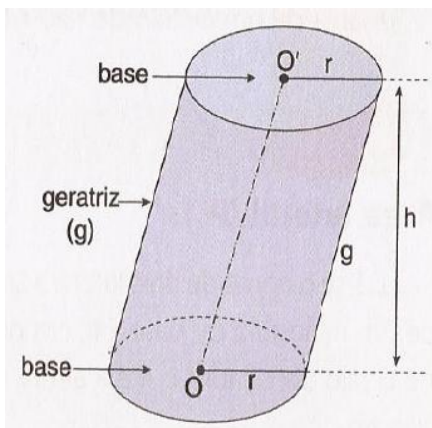



figura 2

ELEMENTOS

***Bases** ➔ círculos de centro O e O' e raio r.*

***Eixo** ➔ segmento OO'.*

***Geratriz (g)**➔ segmento paralelo ao eixo cujas extremidades pertencem à circunferência das bases.*

***Altura (h)**➔ distância entre os planos das bases.*

***Área lateral** ➔ é a reunião de todas as geratrizes.*

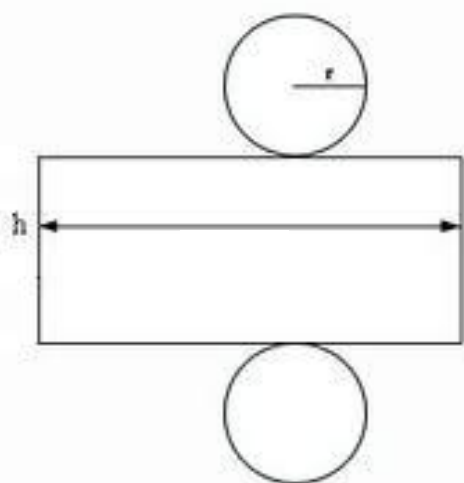
***Área total** ➔ soma da área lateral com as áreas das bases.*

CLASSIFICAÇÃO

Cilindro reto (cilindro de revolução)➔ a geratriz é perpendicular aos planos das bases. Logo g .... h.

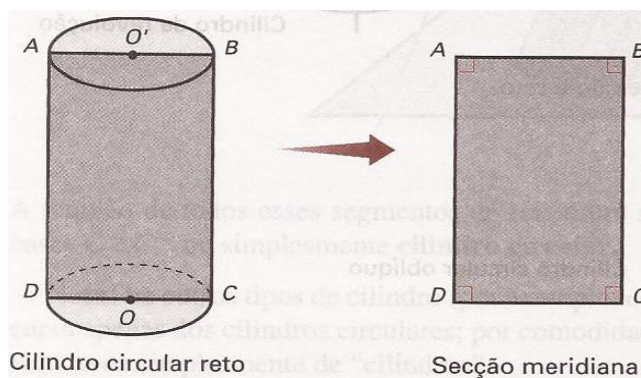
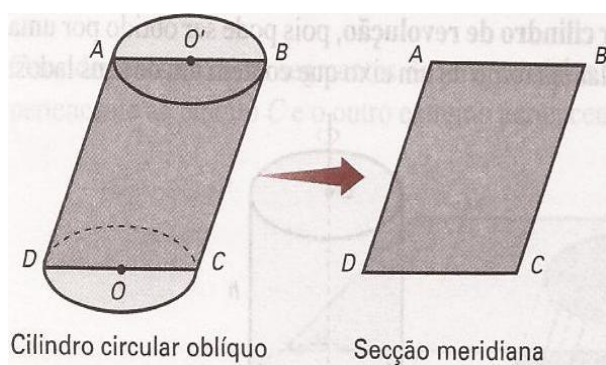
Cilindro oblíquo ➔ é todo aquele que não é reto. Logo, g ...... h

ÁREA DA BASE➔ A_b =

ÁREA LATERAL➔ A_L =

PLANIFICAÇÃO DO CILINDRO RETO

ÁREA TOTAL ➔ A_T =

VOLUME➔ V =

SEÇÃO MERIDIANA *é a interseção de um cilindro circular com um plano que passa pelos centros de suas bases.*

CILINDRO EQUILÁTERO *é aquele cuja seção meridiana é um quadrado.*

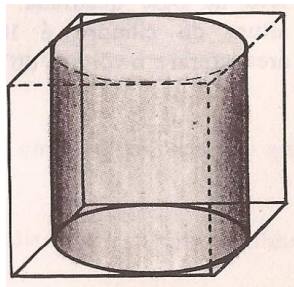
Ex.1) *Em um cilindro equilátero:*
a) Qual é a relação entre g, h e r(raio)?
b) Determine, em função de r, as áreas lateral, total e o volume do cilindro.

Exercícios

1) *Determine o volume, as área lateral e total de um cilindro reto de 6 cm de altura e 4 cm de raio.*

2) *Calcule a altura e o raio de um cilindro reto sabendo que seu volume é 45π cm³ e que sua área lateral é 30π cm².*

3) *Um retângulo de lados 4 cm e 10 cm gira 360º em torno de um eixo que contém seu lado maior. Calcule o volume e a área lateral do sólido assim gerado.*

4) *Abaixo vemos um cilindro inscrito em um cubo de 64 cm³.*

a) Este cilindro é equilátero? Justifique.
b) Calcule o volume do cilindro.

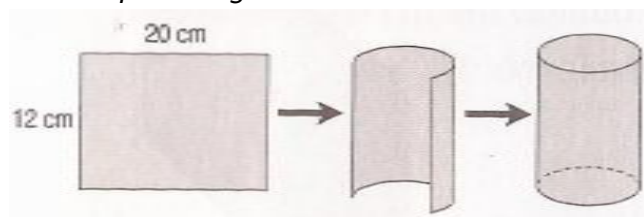
5) *O raio da base de um cilindro circular mede 8 cm e cada geratriz mede 10 cm e forma com o plano da base um ângulo de 30º. Calcule o volume do cilindro.*

6) *(Cescem) O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos cuja altura é 1/4 da altura da lata e cujo diâmetro da base é 1/3 da diâmetro da base da lata. Qual será o número de potes necessários?*

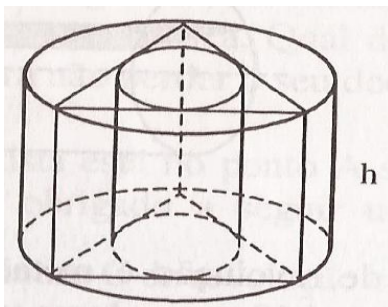
7) *(PUC) Um cilindro é equivalente (mesmo volume) a uma pirâmide regular de base quadrada. O raio da circunferência inscrita na base da pirâmide é* $R = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}$. *Sabendo-se que o cilindro e a pirâmide têm alturas iguais, então o raio da base do cilindro é:*

8) *(UFF) Uma peça de madeira, que tem a forma de um prisma reto com 50 cm de altura e cuja seção reta é um quadrado com 6 cm de lado, custa R$ 1,00. Esta peça será torneada para se obter um pé de cadeira cilíndrico, com 6 cm de diâmetro e 50 cm de altura. O material desperdiçado na produção do pé da cadeira deverá ser vendido para reciclagem por um preço P igual ao seu custo. Determine o preço P, considerando* $\pi = 3,14$.

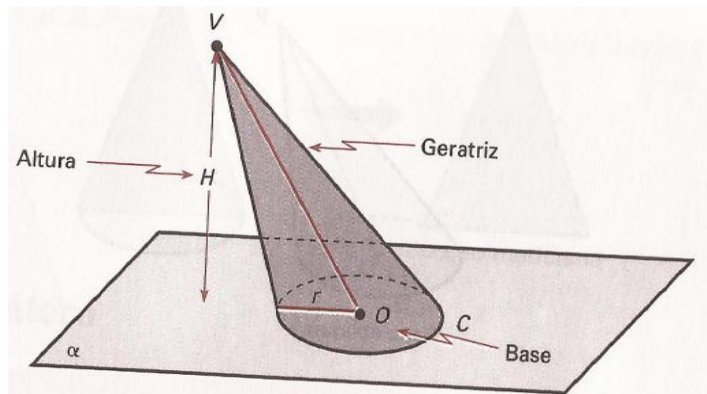
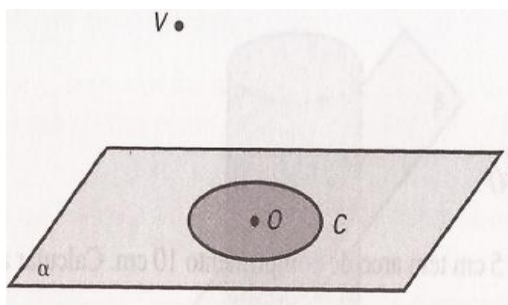
9) *(ITA) O raio de um cilindro de revolução mede 1,5 m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da seção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então a área total do cilindro, em metros quadrados, vale:*

10) *(UFSE) As figuras seguintes descrevem os primeiros passos na fabricação de um cilindro a partir de uma chapa retangular de lata:*

O cilindro resultante terá um volume, em cm³, compreendidos entre:

a) 550 e 600
b) 500 e 550
c) 450 e 500
d) 400 e 450
e) 350 e 400

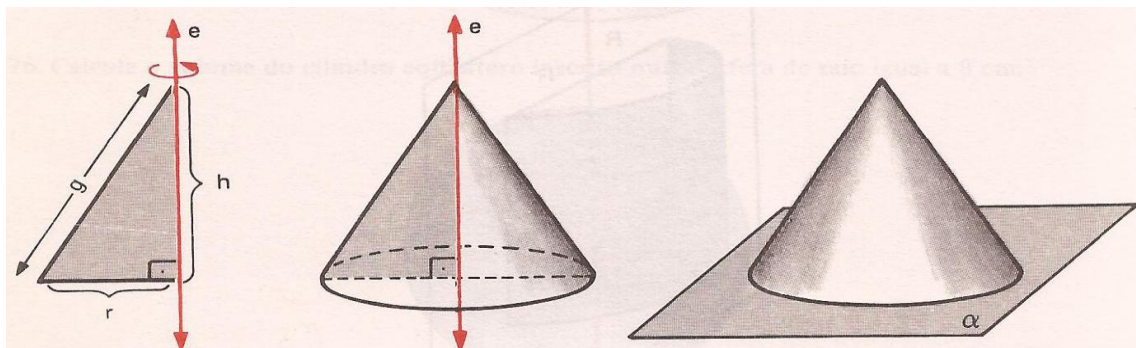
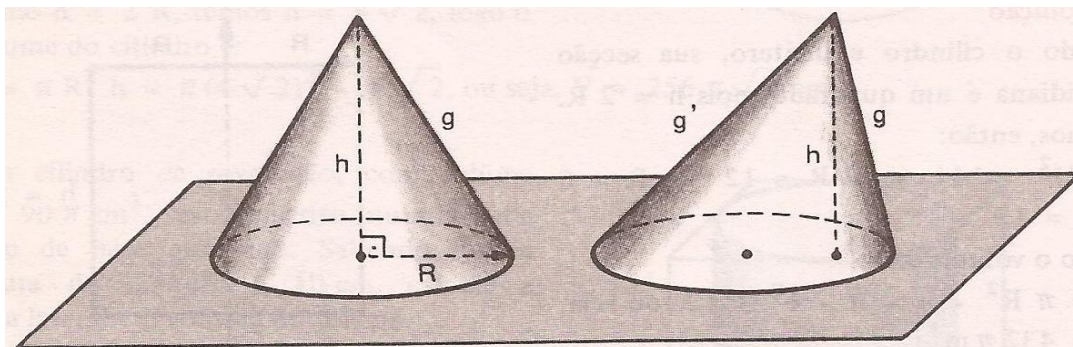
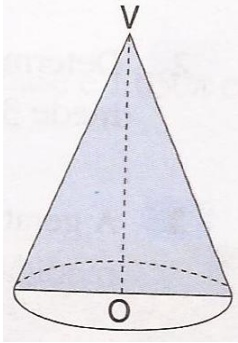
11) *Um prisma triangular regular é inscrito em um cilindro, e um outro cilindro é inscrito neste prisma. Ache a razão entre os volumes dos cilindros maior e menor.*

RESPOSTAS: 1) *96π cm³, 48π cm², 80π cm²;* ***2)*** *r = 3 cm e h = 5 cm;* ***3)*** *160π cm³ e 80π cm²;* ***4)****a) Sim, pois 2r = h; b)16π cm³;* ***5)*** *320 π cm³;* ***6)*** *36;* ***7)*** *1;* ***8)*** *R$ 0,215;* ***9)*** $\frac{9\pi(2+\pi)}{4}$; ***10)****e;* ***11)*** *4*

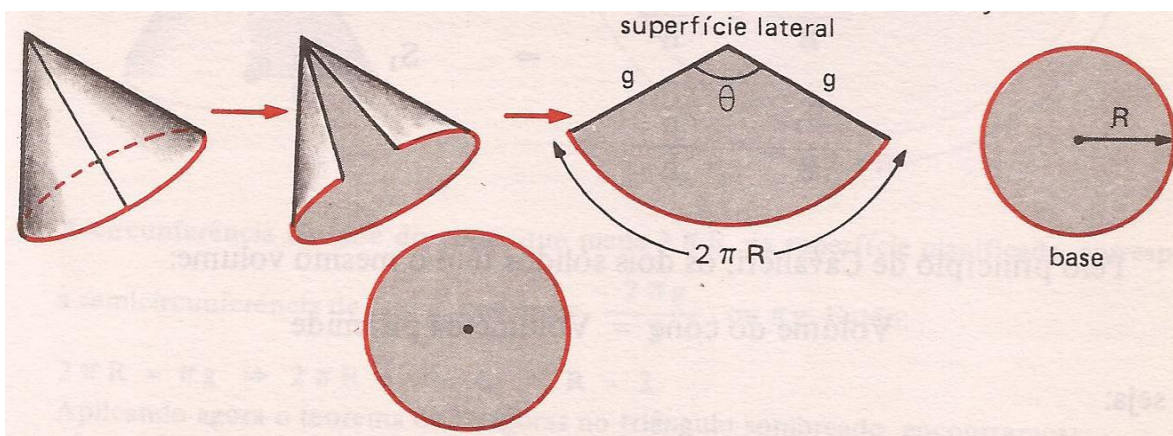
CONE CIRCULAR

*Dados um ponto V não pertencente a um plano α e um círculo C de centro O contido neste plano. A reunião de todos os segmentos de reta que possuem um extremo em V e outro pertencente ao círculo C forma um sólido chamado **cone circular**.*

ELEMENTOS

Vértice *é o ponto V.*
Base *é o círculo C.*
Eixo *é a reta $\overrightarrow{OV}$.*
Geratriz *é todo segmento de reta com extremidades em V (vértice) e um ponto da circunferência da base.*
Altura *é a distância do vértice V ao plano da base.*
Raio da base *é o raio do círculo C.*

CONE RETO ou CONE DE REVOLUÇÃO

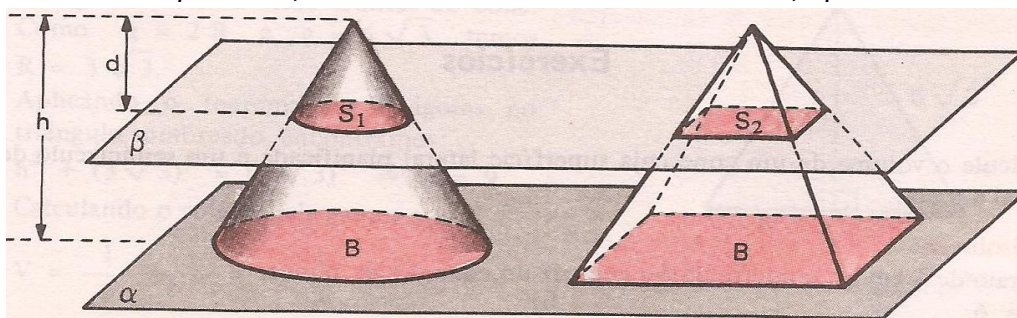
É o sólido gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos

CONE OBLÍQUO ➔ *O eixo não é perpendicular ao plano da base. Como ficam as projeções ortogonais do vértice ao plano da base dos cones reto e oblíquo?*

SEÇÃO MERIDIANA *de um cone é a interseção dele com um plano que contem o eixo* $\overrightarrow{OV}$.

A seção meridiana de um cone reto é um ....
Se a seção meridiana de um cone reto é um triângulo equilátero, então temos um ***CONE EQUILÁTERO****.*
No cone equilátero, qual é a relação entre g (geratriz) e r (raio da base)?

PLANIFICAÇÃO DO CONE RETO

ÁREA DA BASE: $A_B =$

ÁREA LATERAL: $A_L =$, *logo,* ***ÁREA TOTAL é*** $A_T =$

Ex.1) *Escreva o ângulo de abertura θ, em radianos, em função de R e g.*

VOLUME DO CONE RETO

Seja um cone e uma pirâmide, ambos com altura h e base de área B, apoiados num mesmo plano α.

Um plano β paralelo a α, determina no cone e na pirâmide seções S_1 e S_2 de mesma área, pois:

Pelo princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm o mesmo volume:

$$V_{CONE} = V_{PIRAMIDE} \therefore V_{CONE} = \frac{\text{área da base x altura}}{3} =$$

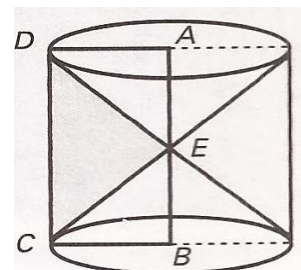
EXERCÍCIOS

1) *A superfície lateral de um cone reto desenvolvida num plano é um setor circular de 120° e 6 cm de raio. Calcule a área lateral, a área total e o volume desse cone.*

2) *Calcule o volume de um cone cuja superfície lateral planificada é um semicírculo de raio igual a 6 cm.*

3) *Calcule o volume de um cone de revolução cuja área lateral é 65π cm² e área total igual a 90π cm².*

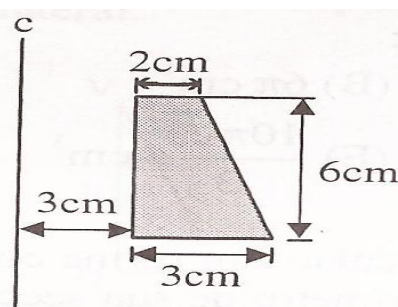
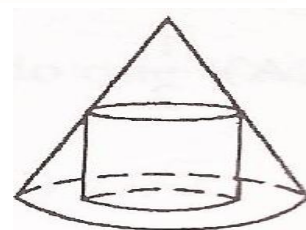
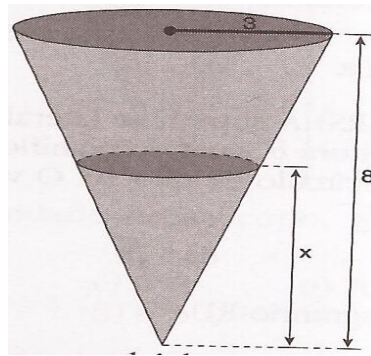
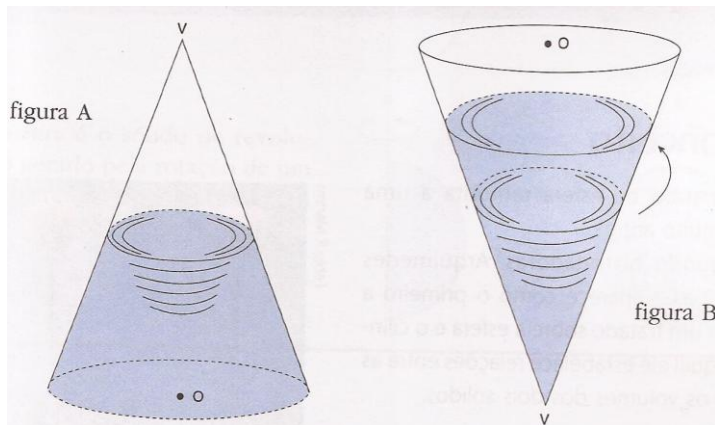
4) *A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 2 e um de seus ângulos agudos mede 60°. Girando-se o triângulo em torno do cateto menor, obtém-se um cone. Qual é o volume desse cone?*

5) *(Fuvest) Na figura, ABCD é um retângulo e BC = BE = EA = r. Ache, em função de r, o volume do sólido gerado pelo triângulo EDC quando o retângulo dá uma volta completa em torno de AB.*

6) *(UFMG) Um reservatório de água tem a forma de um cone circular reto, de eixo vertical e vértice para baixo. Quando o nível da água atinge a metade da altura do tanque, o volume ocupado é igual a π. A capacidade do tanque é:*

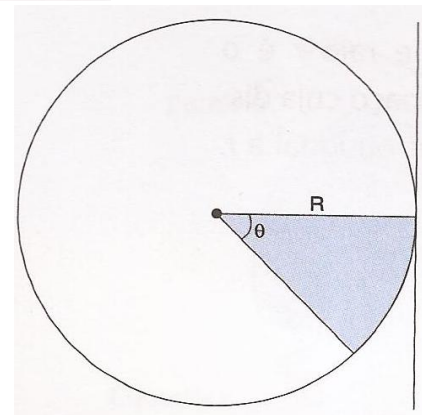
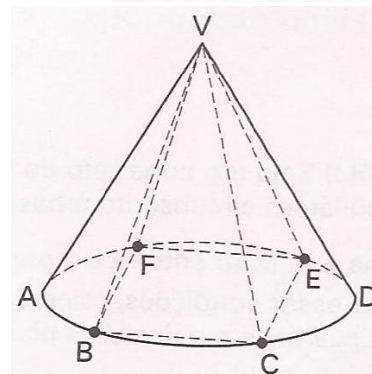
7) *A base de um cone circular reto de vértice V, de raio 12 cm e altura 10 cm está num plano α. Um plano β, paralelo a α, intercepta o cone a uma distância de 6 cm da base. A interseção do cone e do plano β é uma superfície S'.*

a) Calcule, em cm², a área S'.

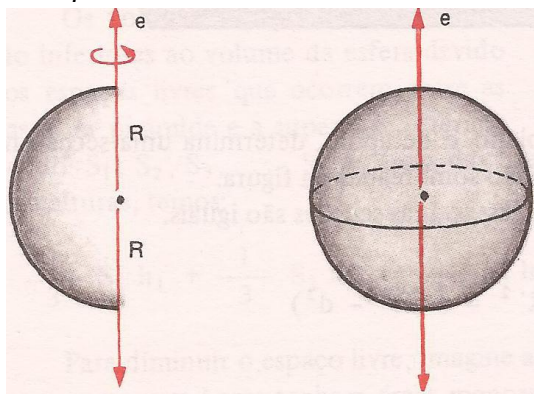
b) Qual é a razão entre os volumes do cone dado e o cone de base S' e vértice V?

8) *(UERJ) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação completa do trapézio, em torno do eixo e.*

9) *(PUC) Considere um cilindro circular reto inscrito em um cone circular reto com 10 cm de raio e 24 cm de altura. Expresse o volume desse cilindro como uma função do raio da base do cilindro.*

10) *(Fuvest) Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível, a altura x atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:*

11) *Um recipiente cônico, de raio da base 1 e altura 2, contém água até a metade de sua altura, como mostra a figura A. Invertendo-se a posição do recipiente, como indica a figura B, qual é a distância do nível da água ao vértice?*

12) *(Fuvest-modificada) Um setor circular, com ângulo central θ ($0 < \theta < 2\pi$), é recortado de um círculo de papel de raio R (ver figura). Utilizando o restante do papel, construímos a superfície lateral de um cone circular reto. Determine, em função de R e θ*

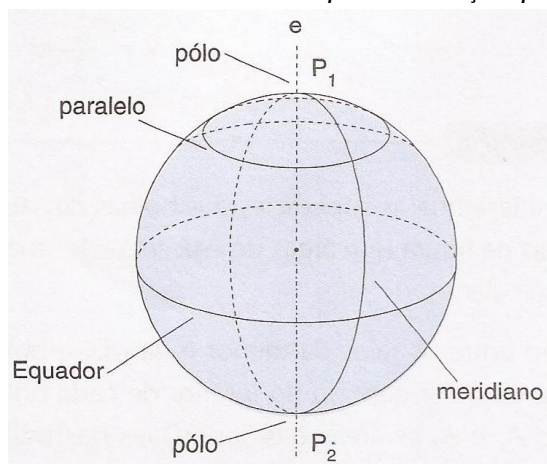
a) o raio da base do cone

b) a altura do cone

13) *(UFMG) Na figura, a base da pirâmide VBCEF é um quadrado inscrito no círculo da base do cone de vértice V. A razão entre o volume do cone e o volume da pirâmide, nesta ordem, é:*

RESPOSTAS

1) 12π cm², 16π cm² e $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$ cm³; **2)** $9\pi\sqrt{3}$ cm³; **3)** 100π cm³; **4)** π; **5)** $\frac{4\pi r^3}{3}$; **6)** 8π; **7)** a) $23{,}04\pi$ cm²; b) 125/8; **8)** 128π cm³; **9)** $V = 24\pi r^2 - 2{,}4\pi r^3$; **10)** $4\sqrt[3]{4}$ cm; **11)** $\sqrt[3]{7}$; **12)** a) $r = \frac{R(2\pi-\theta)}{2\pi}$; b) $h = \frac{R\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}}{2\pi}$; **13)** $\pi/2$

ESFERA *é o sólido de revolução gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.*

Observe que o raio R do semicírculo gerador é o raio R da esfera gerada.

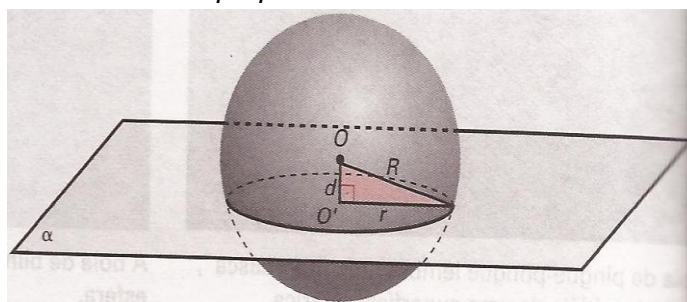
SEÇÃO DA ESFERA

Vamos observar que toda seção plana de uma esfera é um círculo. Há algumas seções conhecidas:

Equador *é a seção perpendicular ao eixo, que contém o centro da esfera.*

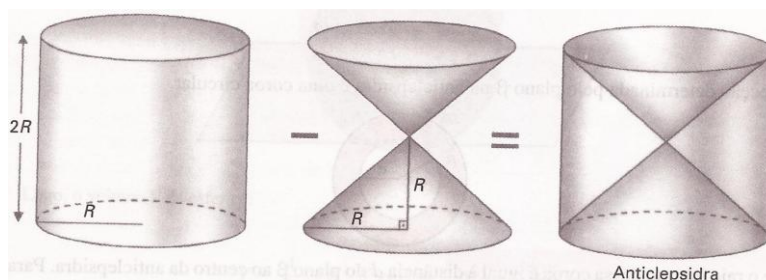
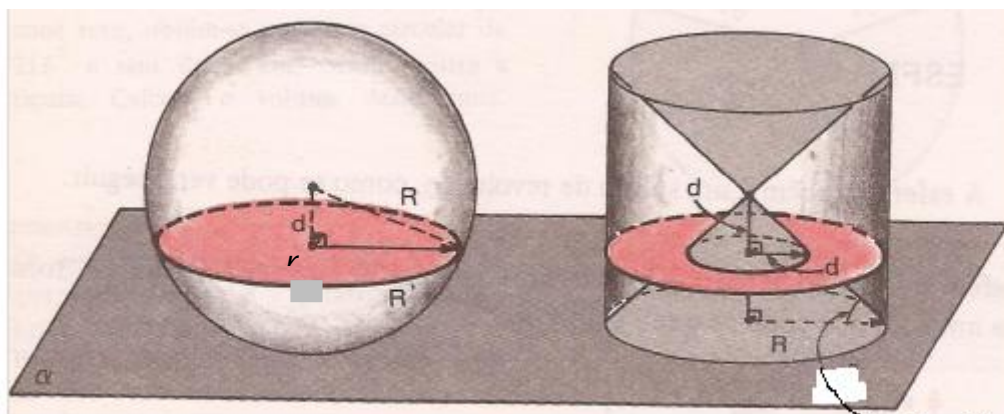
Paralelo *é uma seção perpendicular ao eixo.*

Meridiano *é uma seção cujo plano passa pelo eixo.*

*Observe que as seções acima são determinadas pela posição dos polos P_1 e P_2, que por sua vez, são as interseções do eixo **e** com a superfície esférica*

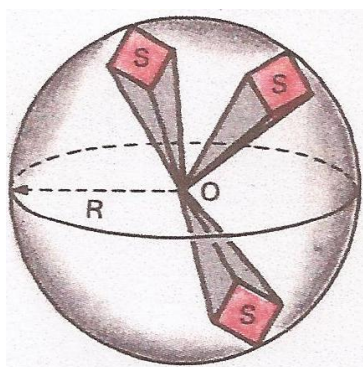
De forma geral, um plano α secante à esfera de centro O e raio R, determina uma seção plana na esfera como um círculo de centro O' e raio r. O segmento OO' = d é perpendicular ao círculo.

*A relação entre **d**, **r** e **R** fica:*

VOLUME DA ESFERA

*Para entender como se chega à fórmula do volume da esfera, utilizamos um sólido auxiliar chamad**o** **anticlepsidra**, que é obtido pela retirada de dois cones retos de altura R e raio da base R de um cilindro equilátero de raio da base R.*

*Provaremos, assim, pelo princípio de Cavalieri, que o volume da **anticlepsidra** tem o mesmo volume da esfera de raio R:*

***A área da seção na anticlepsidra é**:*

***A área da seção na esfera é**:*

Portanto, temos que: $V_{ESFERA} =$

ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Suponha n pirâmides no interior de uma esfera de modo que não haja espaços livres entre elas e que os vértices das pirâmides sejam o centro da esfera e os vértices de suas bases estejam na superfície da esfera.
Assim, devido a existência de espaços livres entre as bases das pirâmides e a superfície esférica, a soma dos volumes das pirâmides é menor que o volume da esfera.
Chamando de S_1, S_2, S_3, ..., S_n as áreas das bases das pirâmides e h_1, h_2, h_3, ..., h_n suas alturas, temos:

$$V_{ESFERA} > \frac{1}{3}S_1h_1 + \frac{1}{3}S_2h_2 + \frac{1}{3}S_3h_3 + \cdots + \frac{1}{3}S_nh_n$$

Quanto mais pudermos diminuir os espaços livres entre as bases das pirâmides e a superfície esférica, mais próximo a soma dos volumes das pirâmides estará do volume da esfera.
Assim, imaginemos que as pirâmides sejam mais numerosas (tendendo a infinito) e que suas bases tenham áreas menores (tendendo a zero) que a situação descrita acima. Desta maneira:
- A soma dos volumes das pirâmides tende ....
- As alturas das pirâmides tendem ....
- As áreas das bases das pirâmides tendem ....

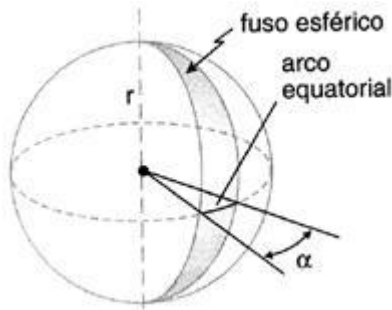
Chamando de A_1, A_2, A_3, ... as áreas das bases, temos:

$$\frac{1}{3}A_1R + \frac{1}{3}A_2R + \frac{1}{3}A_3R + \cdots = V_{ESFERA}$$

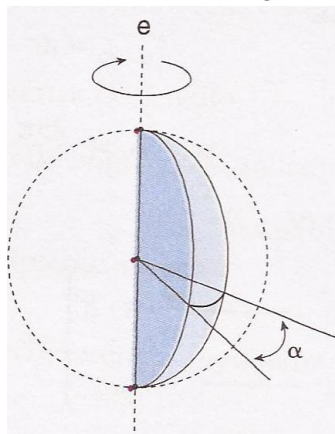
Então podemos deduzir a área da superfície esférica:

FUSO ESFÉRICO

É a __superfície__ gerada pela rotação de uma semicircunferência, que gira α graus ($0° < \alpha \leq 360°$) em torno de um eixo.

De forma geral, a área do fuso é proporcional a α, podendo ser calculada por meio de uma regra de três simples. Assim, a área do fuso, para α em graus e em radianos, respectivamente, será:

CUNHA ESFÉRICA

É o __sólido__ gerado pela rotação de um semicírculo que gira α graus ($0° < \alpha \leq 360°$) em torno de um eixo.

Observamos que o volume da cunha é proporcional a α, podendo ser deduzida por meio de uma regra de três simples. Assim, o volume da cunha, para α em graus e em radianos, respectivamente, será:

Qual é a expressão da área da cunha para α em radianos?

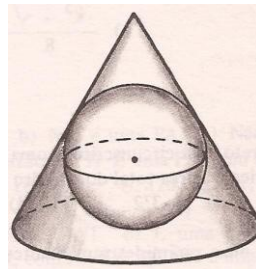
EXERCÍCIOS

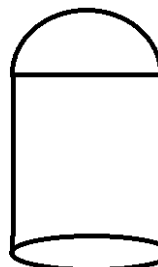
***1)** Uma seção plana de uma esfera tem raio 3 cm e dista 4 cm do centro da esfera. Calcule o volume e área da esfera.*

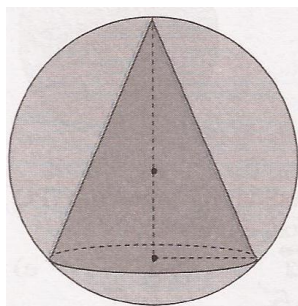
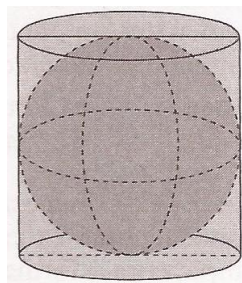
***2)** Um plano α secciona uma esfera de volume $\frac{8788\pi}{3}$ cm³ a 5 cm de seu centro. Calcule a área da seção plana determinada por α nesta esfera.*

***3)** Uma seção plana de uma esfera de superfície 1156π cm² é um círculo de perímetro 30π cm. Calcule a distância dessa seção ao centro da esfera.*

***4)** Duas seções planas de uma esfera são paralelas e têm raios 6 cm e 8 cm. Calcule a distância entre essas seções, sabendo que o raio da esfera mede 10 cm.*

__5)__ Calcule o volume da esfera inscrita num cone equilátero com volume $72\pi\sqrt{3}$ cm³.

__6)__ (FATEC-SP) Se um cilindro reto está circunscrito a uma esfera de raio R, então a razão entre a área da superfície esférica e a área total do cilindro é:

__7)__ (UFCE) Um __silo__ tem a forma de um cilindro circular reto (com fundo) encimado por uma semiesfera, como na figura ao lado. Determine o volume e a área da superfície desse silo, sabendo que o raio do cilindro mede 2 m e que a altura do silo mede 8 m.

__8)__ A razão entre os volumes de duas esferas é $1{,}2^3$. Qual é a razão entre as áreas das superfícies?

__9)__ (PUC) Um cone circular reto, cujo raio da base é 3 cm, está inscrito em uma esfera de raio 5 cm, conforme mostra a figura ao lado. O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?

__10)__ (UFPI) Uma esfera de raio r e volume V_1 está inscrita num cilindro circular reto de volume V_2, conforme a figura. Qual é a razão $\frac{V_2}{V_1}$?

__11)__ (UFPA) No interior de um tubo, em forma de um cilindro circular reto, de altura 20 cm e raio da base 2 cm, coloca-se o maior número possível de esferas, conforme figura ao lado. O volume interior do cilindro e exterior às esferas, em cm³, é:

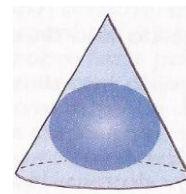
__12)__ (Fuvest) Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio dessa circunferência, em centímetros é:

__13)__ Um recipiente cilíndrico cujo raio da base é 6 cm contém água até certa altura. Uma esfera de aço é colocada no interior do recipiente, ficando totalmente submersa. Se a altura da água subiu 1 cm, qual é o raio da esfera?

14) *Determine:*

a) O volume de uma esfera inscrita em um cubo de 10 cm de aresta.

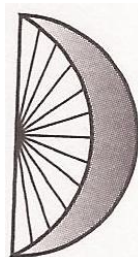
b) O volume de um cubo inscrito em uma esfera de 10 cm de raio.

15) *(Covest-PE) A figura ao lado ilustra a esfera de maior raio contida no cone reto de raio da base igual a 6 e altura igual a 8, tangente ao plano da base do cone. Qual o inteiro mais próximo da metade do volume da região do cone exterior à esfera?*

16) *Determine:*

a) A área da superfície gerada pela rotação de 60° de uma semicircunferência de raio 3 cm em torno de seu diâmetro.

b) O volume do sólido gerado pela rotação de 60° de uma semicírculo de raio 3 cm em torno de seu diâmetro.

17) *Calcule a área total de uma cunha esférica de raio 2 cm cujo ângulo diedro é de 40°.*

18) *(Cesgranrio) Uma laranja pode ser considerada como uma esfera de raio R, composta de doze gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo, escrita em função de R, vale:*

19) *Calcule:*

a) A área de um fuso esférico de raio 2 cm cujo ângulo diedro mede $\frac{\pi}{5}$ *rad.*

b) A área e o volume de uma cunha esférica de raio 2 cm cujo ângulo diedro mede $\frac{3\pi}{8}$ *rad.*

20) *(UNICAMP) Uma esfera de 4 cm de raio cai numa cavidade cônica de 12 cm de profundidade, cuja abertura tem 5 cm de raio. Determine a distância da cavidade à esfera.*

21) *O que ocorre com o volume de uma esfera quando o raio:*

a) aumenta 100%

b) aumenta 300%

c) diminui 50%

22) *O que ocorre com a superfície de uma esfera quando o raio:*

a) aumenta 200%

b) aumenta 150%

c) diminui 25%

23) *(UFMG) Duas bolas metálicas, cujos raios medem 1 cm e 2 cm, são fundidas e moldadas em forma de um cilindro circular de altura 3 cm. O raio do cilindro, em cm, é:*

24) *(UFRS) Duas bolas concêntricas tem raios medindo* $\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{6}$ *. A interseção da bola maior com um plano tangente à bola menor determina uma região plana de área igual a:*

25) *A área de um círculo máximo de uma esfera vale* 100π *cm². Calcule a área da superfície esférica e o volume da esfera.*

26) *(UERJ) Internamente, a cúpula do teto de um teatro tem a forma da superfície de uma semiesfera, cujo raio mede 4 m. Se um galão de tinta é suficiente para pintar 21 m², o número necessário de galões para realizar todo o serviço de pintura interna da cúpula é, aproximadamente de:*

27) *Um cubo e uma esfera têm igual superfície. Qual dos dois sólidos tem maior volume?*

28) *(UFMG) Qual é a razão entre os volumes dos cubos circunscrito e inscrito em uma esfera de raio R?*

29) *(ITA) Se numa esfera de raio R, circunscrevermos um cone reto cuja geratriz é igual ao diâmetro da base, então a expressão do volume deste cone em função do raio da esfera é dado por:*

30) *(ITA)Uma esfera de raio r = $\sqrt{3}$ cm está inscrita num prisma hexagonal regular que, por sua vez, está inscrito numa esfera de raio R. Pode-se afirmar que a medida do raio R vale:*

RESPOSTAS

1) V = $\frac{500\pi}{3}$ cm^3, $A = 100\pi\, cm^2$; 2)144π cm²; 3) 8 cm; 4) 14cm ou 2cm; 5) $32\pi\sqrt{3}$ cm³; 6) 2/3; 7) V = $\frac{88\pi}{3} m^3, A = 36\pi\, m^2$; 8) 1,44; 9)16,2%; 10)3/2; 11)80π/3; 12) 5; 13)3 cm; 14)a) V = $\frac{500\pi}{3}$ cm^3; b) V = 400 cm³; 15) 94; 16)a) 6π cm², b) 6π cm³; 17) $\frac{52\pi}{9}$ cm^2; 18) $\frac{4\pi R^2}{3}$; 19)a) $\frac{8\pi}{5}$ cm²; b) 7π cm² e 2π cm³; 20)6,4 m; 21)a)aumenta 700%; b) aumenta 6300%; c) diminui 12,5%; 22)a) aumenta 900%; b) aumenta 625%; c) diminui 6,25%; 23)2; 24) 4π; 25) 400π dm² e $\frac{400\pi}{3}$ dm³; 26) 5; 27)o cubo; 28)$\sqrt{3}$; 29) 3 – R³; 30) $\sqrt{7}$ cm